Функциональный анализ, 6 семестр
Конспект лекций Додонова Н. Ю.

https://github.com/artemZholus/funcan

Содержание

1 Линейные операторы в банаховых пространствах

1.1 Сопряженный оператор

Здесь и далее, если не оговорено иного, считаем, что мы находимся в B-пространствах.

Определение (сопряженное пространство)**.** $X^* = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{непр.}]{\text{лин.}} \mathbb{R} \right\}$ — пространство сопряженное к X.

Заметим, что это пространство линейных функционалов, а значит, мы можем ввести в нем норму как норму линейного функционала.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \tag{1}$$

По свойствам числовой оси получаем, что X^* всегда банахово (независимо от X).

Рассмотрим теперь $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $f(x) = \varphi(Ax)$, где $\varphi \in Y^*$.

Определение. Сопряженный оператор к A имеет вид $A^*(\varphi) = \varphi \circ A$.

Утверждение 1.1. *Если A нерперывный, то A^* тоже непрерывный.*

Доказательство. Пусть A непрерывен, тогда он ограничен. Тогда справедливо

$$\|A^*(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|A\| . \tag{2}$$

Переходя к sup по φ получаем непрерывность A^*. □

Теорема 1.2. $\|A^*\| = \|A\|$

Доказательство. Мы доказали неравенство в одну сторону (неравенство 2). Докажем в другую. По определению sup: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon : \|x_\varepsilon\| = 1 \implies \|A\| - \varepsilon < \|Ax_\varepsilon\|$. Пусть $Z = \mathcal{L}(Ax_\varepsilon)$. Рассмотрим $f : Z \to \mathbb{R}$, $f(\alpha A x_\varepsilon) = \alpha \|Ax_\varepsilon\|$. Очевидно, что $f \in Y^*$. Поэтому, по теореме Хана-Банаха распространим f на все Y, и назовем ее φ_ε. Тогда, по свойствам f, $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$, $\varphi_\varepsilon(Ax_\varepsilon) = \|Ax_\varepsilon\|$. Следовательно, $\|A\| - \varepsilon < \varphi_\varepsilon(Ax_\varepsilon) = A^*(\varphi_\varepsilon, x_\varepsilon)$. Тогда $\|A\| - \varepsilon < \|A^*\| \cdot \|\varphi_\varepsilon\| \cdot \|x_\varepsilon\| = \|A^*\|$. Переходя к sup по ε получаем нужное неравенство. □

Пример: **TODO**

Теорема 1.3 (теорема Рисса)**.** *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда $\forall f \in H^*$, f можно представить как $f(x) = \langle x, y \rangle$, где $y \in H$, $\|f\| = \|y\|$.*

Доказательство. Докажем в 3 этапа.

1. Построим соотвестсвующий функционал по данному y.
   Пусть $g(x) = \langle x, y \rangle$. Очевидно, что это линейный функционал. По неравенству Шварца $|g(x)| \leqslant \|y\| \|x\| \implies \|g\| \leqslant \|y\|$. Это значит, что g ограничен. Возьмем $x = \frac{y}{\|y\|}$.

   $$g\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \frac{1}{\|y\|} \langle y, y \rangle = \|y\|$$

   Сопоставляя это с тем, что $\|g\| \leqslant \|y\|$, получаем, что $\|g\| = \|y\|$.

2. Докажем, что этому функционалу соответствует только один y.
   Пусть для какого-то $\widetilde{y}$ справедливо $g(x) = \langle x, \widetilde{y} \rangle$. Тогда $0 = \langle x, y \rangle - \langle x, \widetilde{y} \rangle = \langle x, y - \widetilde{y} \rangle$. Пусть $x = y - \widetilde{y}$, тогда $\langle y - \widetilde{y}, y - \widetilde{y} \rangle = 0 \implies y = \widetilde{y}$

3. Найдем y для данного функционала f.
   Рассмотрим произвольный функционал $f \in H^*$. Как известно, $\operatorname{Ker} f$ — гиперплоскость, т.е. $\operatorname{codim} H_1 = \dim H_2 = 1$, где $H_1 = \operatorname{Ker} f$, $H_2 = H_1^\perp$, и $H = H_1 \oplus H_2$. Это по определению значит, что x единственным образом представим как $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$. Поэтому, $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) = f(\alpha e) = \alpha \cdot f(e)$, так как $x_1 \in \operatorname{Ker} f$, а e — базисный вектор из H_2. Итак, $\alpha \cdot f(x) = \langle x, y \rangle \Leftrightarrow f(e) = \langle e, y \rangle$. Очевидно, y можно брать из H_2, так как если у него будет компонента из $\operatorname{Ker} f$, то она будет ортогональна e. Поэтому, считаем, что $y = \beta e$. Получаем $f(e) = \langle e, \beta e \rangle = \beta \cdot \|e\|^2$. Положим $\beta = \frac{f(e)}{\|e\|^2}$, тогда $y = \frac{f(e)}{\|e\|^2} e$.

$\square$

Пример: **TODO**

Пусть $H = L_2(E)$, $\varphi \in L_2^*(E)$. Тогда $\varphi(f) = \int_E g \cdot f d\mu$. Согласно теореме Рисса, возвращаясь к сопряженному оператору, мы видим следующее. $A^*(\varphi, x) = \varphi(Ax) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ - последнее равенство по теореме Рисса. Причем y и z выбираются единственным образом, и $z = A^*(y)$. В гильбертовом пространстве это может служить определением сопряженного оператора:

Определение (Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве)**.** Пусть $x, y \in H$. Пусть $A : H \to H$. Тогда A^* - такой, что $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$.

1.2 Ортогональное дополнение в банаховых пространствах

Определение (ортогональное дополнение в B-пространстве)**.** Пусть $S \subset X$.

Тогда $S^\perp = \{f \mid f \in X^*, \forall x \in S \implies f(x) = 0\}$.

Определение (ортогональное дополнение в сопряженном пространстве)**.** Пусть $S \subset X^*$.

Тогда $S^\perp = \{x \mid x \in X, \forall f \in S \implies f(x) = 0\}$.

Заметим, что независимо от S, $S^\perp$ замкнуто в силу непрерывности $f(x)$

Утверждение 1.4.

1. $X^\perp = \{0\}$*;*

2. $X^{*\perp} = \{0\}$.

Доказательство.

1. $f \in X^\perp$. Если $\forall x \in X, f(x) = 0$, то $f \equiv 0$.

2. Рассмотрим $\forall f \in X^*$. Очевидно, $f(0) = 0$, а это значит, что $0 \in X^{*\perp}$. Предположим, что $\exists x_0 \neq 0 : x_0 \in X^{*\perp}$. По теореме 1.2:
$$\exists f \in X^* : f(x_0) = \|x_0\| \neq 0 \implies x_0 \notin X^{*\perp}.$$ $\square$

Определение (множество значений оператора)**.** $R(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{Ax \mid x \in X\}$.

Теорема 1.5. $\operatorname{Cl} R(A) = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$.

Доказательство.

1. Пусть $y \in R(A)$, это значит, что $y = Ax$ для некоторого x. Рассмотрим $\varphi \in \operatorname{Ker} A^*$. По определению, $A^*\varphi = 0$, это значит, что $\forall x \in X \implies \varphi(Ax) = \varphi(y) = 0$. Следовательно, $y \in (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$

2. Пусть теперь $y \in \operatorname{Cl} R(A) \implies \exists y_n : y_n \to y$. По предыдущему пункту, $y_n \in (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$. $\forall \varphi \in \operatorname{Ker} A^* \implies \varphi(y_n) = 0$, при этом, φ непрерывен. $\varphi(y_n) \to \varphi(y) = 0 \implies y \in (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$.

3. Осталось проверить, что $(\operatorname{Ker} A^*)^\perp \subset \operatorname{Cl} R(A)$. Вместо этого, мы проверим эквивалентный факт: $y \notin \operatorname{Cl} R(a) \implies y \notin (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$. Итак, пусть $L = \operatorname{Cl} R(A)$. Очевидно, это линейное подпространство в Y. Пусть $\widehat{L} = \{z + ty \mid z \in L, t \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, $\widehat{L}$ — линейное подпространство Y. Рассмотрим $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(z + ty) \stackrel{\text{def}}{=} t$. По теорема Хана-Банаха его можно продлить на Y с сохранением нормы: $\exists \widehat{\varphi} \in Y^* : \widehat{\varphi}\big|_{\widehat{L}} = \varphi$. Причем, если $z \in L$, то $\widehat{\varphi}(z) = 0$, значит $\widehat{\varphi} \in \operatorname{Ker} A^*$. Но, при этом $\widehat{\varphi}(y) = 1 \implies y \notin (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$. $\square$

Теорема 1.6. $R(A) = \operatorname{Cl} R(A) \implies R(A^*) = (\operatorname{Ker} A)^\perp$.

Доказательство. Рассмотрим $f \in R(A^*)$. По определению, для некоторого φ, $f = A^*\varphi$. Возьмем теперь $x \in \operatorname{Ker} A$. $Ax = 0 \implies f(x) = (\varphi \circ A)(x) = \varphi(Ax) = \varphi(0) = 0$. Значит, $R(A^*) \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$.

Пусть теперь $f \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$. В силу того, что $R(A)$ - B-пространство (как замкнутое линейное подпространство другого B-пространства), Возьмем произвольный $y \in R(A)$, и x такой, что $y = Ax$, и запишем φ как $\varphi(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$. Покажем, что такое определение действительно корректное. Пусть $y = Ax'$; тогда

$A(x-x')=0 \implies x-x' \in \operatorname{Ker} A$. Поэтому $f(x-x')=0 \implies f(x)=f(x')$. Это значит, что значение φ не зависит от выбора конкретного x. Значит, наша формула корректная. Осталось показать ограниченность $\|\varphi\|$.

Рассмотрим ассоциированный оператор $\mathcal{U}_A : X/\operatorname{Ker} A \to R(A)$. Покажем, что он непрерывен.

$\|\mathcal{U}_A\| = \sup_{\|[x]\|=1} \|\mathcal{U}_A\,[x]\|$, так как $\|[x]\| = \inf_{z\in[x]} \|z\| = 1$, то существует $x' \in [x] : \|x'\| \leqslant 2$. Возьмем x' в качестве представителя. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_A\| &= \sup_{\|[x]\|=1} \|\mathcal{U}_A\,[x]\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 2} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|A(2y)\| \\ &= 2 \cdot \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|Ay\| = 2\,\|A\| \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим еще, что он биективен, так как все точки x для которых $y = Ax$ (для какого-то одного фиксированного y) лежат в одном классе эквивалентности. Это значит, что по теореме Банаха о гомеоморфизме, $\mathcal{U}_A^{-1}$ непрерывен. Напомним, что норма на элементах $X/\operatorname{Ker} A$ определяется как

$$\|[x]\| \overset{\text{def}}{=} \inf_{z\in[x]} \|z\| \tag{4}$$

По непрерывности обратного оператора получаем $\|[x]\| \leqslant K \cdot \|y\|$. Нам нужно сделать неравенство строгим, поэтому считаем, что $\|[x]\| < 2K \cdot \|y\|$. Дальше, по определению инфимума, $\exists z \in [x] : \|z\| < 2K \cdot \|y\|$. Значит, $z - x \in \operatorname{Ker} A$. В силу того, что значение функционала f одно и то же внутри класса эквивалентности, можно вместо x взять z. Таким образом, $|\varphi(y)| \leqslant 2K \cdot \|f\| \cdot \|y\|$, из этого следует, что φ непрерывен. Далее, по теореме Хана-Банаха, продолжим φ на все пространство и получим, что $\exists \widehat{\varphi} \in Y^* : f = A^*\widehat{\varphi} \implies f \in R(A^*)$. □

В силу того, что во второй теореме требуется замкнутость, возникает вопрос: а когда это действительно будет? Одним из инструментов, дающих ответ на этот вопрос, является *априорная оценка решения операторного уравнения.*

Определение (априорная оценка решения операторного уравнения)**.** Пусть $A : X \to Y$ - линейный оператор, $y \in R(A)$, $\exists \alpha = \text{const}$, такая что $\|x\| \leqslant \alpha\,\|y\|$, где $y = Ax$. Коэффициент α называется *априорной оценкой.*

Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема:

Теорема 1.7. *Если A — линейный ограниченный оператор, такой что для уравнения $y = Ax$ существует априорная оценка, то $R(A)$ — замкнуто.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность значений оператора $y_n \in R(A)$, такую что $y_n \to y$. Проверим, что тогда $y \in R(A)$. Пусть $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, в силу банаховости пространства Y, можем написать ряд утверждений:

$$\begin{gathered} \text{для } \varepsilon_1\ \exists n_1 : \forall n, m \geqslant n_1 \implies \|y_m - y_n\| \leqslant \varepsilon_1 \\ \text{для } \varepsilon_2\ \exists n_2 : \forall n, m \geqslant n_2 \implies \|y_m - y_n\| \leqslant \varepsilon_2 \\ \dots \\ \text{для } \varepsilon_k\ \exists n_k : \forall n, m \geqslant n_k \implies \|y_m - y_n\| \leqslant \varepsilon_k \\ \dots \end{gathered}$$

при этом, очевидно, что $n_k \leqslant n_{k+1}$. Теперь рассмотрим ряд $y_{n_1} + (y_{n_2} - y_{n_1}) + (y_{n_3} - y_{n_2}) + \ldots = y$. Слагаемое этого ряда мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, поэтому, он сходится абсолютно.

Так как $R(A)$ — подпространство, значит $y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \in R(A)$. Следовательно, $y_{n_{k+1}} - y_{n_k} = Ax_k$. По условию теоремы, для x_k выполняется $\|x_k\| \leqslant \alpha \left\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\right\| \leqslant \alpha\varepsilon_k$. Возьмем ряд $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$, где $y_{n_1} = Ax_0$. Ряд из норм его слагаемых можно ограничить сходящимся рядом: $\|x_0\| + \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots \leqslant \|x_0\| + \alpha \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots) = \|x_0\| + \alpha$. Поэтому у него есть предел x, и мы можем применить к нему оператор почленно (в силу его непрерывности): $Ax = Ax_0 + Ax_1 + Ax_2 + \ldots = y_{n_1} + (y_{n_2} - y_{n_1}) + (y_{n_3} - y_{n_2}) + \ldots = y$. Таким образом, $y \in R(A)$. □

2 Элементы спектральной теории линейных операторов

2.1 Определение спектра и резольвенты оператора

Определение (регулярная точка)**.** Число $\lambda \in \mathbb{C}$, называется *регулярной точкой* для оператора A, если оператор $\lambda I - A$ — непрерывно обратим.

Определение (резольвента)**.** Множество всех регулярных точек называется *резольвентой* (обозначается $\rho(A)$) оператора A.

Определение (резольвентный оператор)**.** Оператор $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ называется *резольвентным оператором.*

Определение (спектр)**.** Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A.

Рассмотрим $\lambda \in \sigma(A)$. Может быть два случая:

1. $\operatorname{Ker}(\lambda I - A) \neq \{\mathbf{0}\}$. Это значит, что оператор $\lambda I - A$ имеет нетривиальное собственное подпространство, в котором (по определению) выполняется $Ax = \lambda x$, $x \neq \mathbf{0}$, для некоторых x (то, что часто называется собственными числами и векторами).

2. $\operatorname{Ker}(\lambda I - A) = \{\mathbf{0}\}$. Здесь необходимо рассмотреть два подслучая:

   (a) $\dim X < +\infty$. В конечномерном случае из сюрьективности следует биективность, поэтому обратный оператор всегда существует. А спектр будет состоять из собственных значений.

   (b) $\dim X = +\infty$. В этом случае может отсутствовать непрерывная обратимость. Если при этом $\operatorname{Cl} R(\lambda I - A) = X$, то говорят, что λ принадлежит непрерывной части спектра. Иначе говорят, что λ принадлежит остаточной части спектра. (те λ для которых ядро нетривиально называют дискретной частью спектра).

Утверждение 2.1. *Резольвентное множество является открытым в* $\mathbb{C}$*.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, тогда $\lambda_0 I - A$ - непрерывно обратим. Напишем тождество: $\lambda I - A = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - A$. $I = (\lambda_0 I - A)R_{\lambda_0}(A)$. Отсюда, $\lambda I - A = (\lambda_0 I - A) \cdot (R_{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) - I)$. Заметим, что если $\|R_{\lambda_0}\| \cdot |\lambda - \lambda_0| < 1$, то по теореме Банаха о непрерывной обратимости оператора $I - C$, оператор $R_{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) - I$ - непрерывно обратим. Получается, что если $\lambda : |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$, то $\lambda \in \rho(A)$. □

Следствие 2.2. *Спектр - замкнутое множество.*

Теорема 2.3. *Пусть A - ограничен, тогда $\sigma(A) \neq \varnothing$*

Определение (Спектральный радиус оператора)**.**

$$r_\gamma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Утверждение 2.4. $\exists \lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r_\gamma(A)$

Доказательство. Очевидно, что всегда существует $\inf_n \sqrt[n]{\|A^n\|} = r$. Итак, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \sqrt[n_0]{\|A^{n_0}\|} < r + \varepsilon$. Рассмотрим теперь $n > n_0$. $n = m_n \cdot n_0 + d_n$. Тогда

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \left\|A^{m_n \cdot n_0} \cdot A^{d_n}\right\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|A^{n_0}\|^{\frac{m_n}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{d_n}{n}}, \text{ где } \|A\|^{\frac{d_n}{n}} \to 0.$$

$$\|A^{n_0}\|^{\frac{m_n}{n}} < \left(\|A^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}}\right)^{\frac{n_0 \cdot m_n}{n}} < (r + \varepsilon)^{\frac{m_n \cdot n_0}{n}}$$

Следовательно, $r \leqslant \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant (1 + \alpha_n) \cdot (r + \varepsilon)^{1 - \frac{d_n}{n}} = (1 - \alpha_n) \cdot (r - \varepsilon)^{\frac{d_n}{n}} \cdot (r + \varepsilon) = (1 + \gamma_n) \cdot (r + \varepsilon)$. □

Пример. Пространство $C[0,1]$. Оператор $A(f,t) = t \cdot f(t)$. Очевидно, что $\|A(f)\| \leqslant \|f\|$. Пусть $\lambda I - A = A_\lambda$. $A_\lambda(f,t) = (\lambda - t) \cdot f(t) = g(t) \implies f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t}$. При каких λ, A_λ непрерывно обратим? Очевидно, при $\lambda \notin [0,1]$. Это значит, что если $\lambda \in [0,1] \implies \lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\sigma(A) = [0,1]$.

Пример. Пространство $C[0,1]$. $A(f,x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0,1]$. Вычислим его спектральный радиус.

$$A(f,x) = \int_0^x f(t)dt$$
$$A^2(f,x) = \int_0^x \left(\int_0^{x_1} f(t)dt\right) dx_1$$
$$A^n(f,x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n+1}} f(t)dt \leqslant \frac{\|f\|}{n!}$$
$$\|f\| \leqslant 1 \implies \|A^n\| \leqslant \frac{1}{n!} \implies r_n \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \implies r_\sigma(A) = 0$$

Теорема 2.5. $\sigma(A) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant r_\sigma(A)\}$

Доказательство. Преобразуем $\lambda I - A = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$, найдем все λ, при которых у последнего оператора есть обратный. Рассмотрим ряд $\sum_0^{+\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$, если он сходится, то совпадет с $(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}$ Так как мы в банаховом пространстве, ряд из операторов, сходится, когда сходится ряд из норм: $\left\|\sum_0^{+\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n\right\| \leqslant \sum_0^{+\infty}\|A^n\| \cdot \frac{1}{\lambda}$. По радикальному признаку Коши, $\sqrt[n]{\|A^n\| \cdot \frac{1}{\lambda^n}} \to \frac{1}{\lambda} \cdot r_\sigma(A) < 1$ - это достаточное условие сходимости. Таким образом, если $\lambda > r_\sigma(A)$ - то соответствующий оператор обратим. □

Теорема 2.6 (Об отображении спектра полиномами)**.** $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$

Лемма 2.7. $P(A)$ *- непрерывно обратим* $\Leftrightarrow 0 \notin P(\sigma(A))$

Доказательство.

1. Необходимость.

   Сначала проверим следующий факт. Если два оператора коммутируют и их произведение непрерывно обратимо, то и каждый из них непрерывно обратим. $T = A \cdot B = B \cdot A$, $\exists T^{-1}$ - непрерывно обратимый. $I = T^{-1}T = T^{-1} \cdot (AB) = \left(T^{-1}A\right) \cdot B = B^{-1}B$. Для A аналогично. В общем случае, $p(t)$ имеет вид $p(t) = a(t-\lambda_1)^{m_1} \cdot (t-\lambda_2)^{m_2} \cdots (t-\lambda_n)^{m_n}$, а $p(A) = a(A-\lambda_1 I)^{m_1} \cdot (A-\lambda_2 I)^{m_2} \cdots (A-\lambda_n I)^{m_n}$. Так как $p(A)$ - непрерывно обратим, то, по доказанному, каждый из множителей непрерывно обратим. Это значит, что каждое из $\lambda_j \in \rho(A)$. Поэтому, если $0 \in p(\sigma(A))$, то одно из λ_j является корнем уравнения $p(t) = 0$. То есть, при каком-то λ_j, $p(\lambda_j) = 0$, это значит что $\lambda_j \in \sigma(A)$. Но $\lambda_j \in \rho(A)$. Противоречие.

2. Достаточность. Тут все аналогично необходимости, только в другую сторону.

□

Доказательство теоремы. Рассмотрим полином $p_1(t) = p(t) - \lambda$. Тогда, по лемме, $p_1(A)$ - непрерывно обратим тогда и только тогда когда $0 \notin p_1(\sigma(A))$, что эквивалентно $p(A) - \lambda I$ - непрерывно обратим, тогда и только тогда когда $\lambda \notin p(\sigma(A))$. Но $\exists (p(A) - \lambda I)^{-1} \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(p(A))$ □

2.2 Альтернатива Фредгольма-Шаудера

Определение (Компактный оператор)**.** Оператор $A : X \to Y$ называется *компактным* если $\forall M$ - ограниченное множество, $A(M)$ - относительный компакт.

TODOпример оператора фредгольма.

Утверждение 2.8 (Компактность произведения)**.** *Пусть A - компактный оператор, а B - ограниченный. Тогда AB и BA - компактны.*

Доказательство. Достаточно проверить компактность в единичном шаре. Пусть V_1 - замкнутый шар единичного радиуса, проверим, что $B(A(V_1))$ - относительный компакт. Так как $A(V_1)$ - относительный компакт, можем подобрать конечную ε-сеть. $\forall \varepsilon \exists y_1, \ldots, y_n \forall x \in V_1 \exists j \, \|A(x) - y_j\| < \varepsilon$. Пусть $z_j = B(y_j)$. $\forall x \in V_1 \, \|B(A(x)) - z_j\| = \|B(A(x) - y_j)\| \leqslant \|A(x) - y_j\| \cdot \|B\| \leqslant \varepsilon \|B\|$ □

Утверждение 2.9. *В бесконечномерных пространствах, компактный оператор не может быть непрерывно обратимым.*

Доказательство. Пусть A - компактный, $\exists A^{-1}$ - непрерывный. Тогда $I = A \cdot A^{-1}$ - компактный. Однако, это не так (потому что бесконечномерная сфера - не компакт). □

В классе сепарабельных банаховых пространств важную роль имеют пространства с базисом *Шаудера*.

Определение (базис Шаудера)**.** Пусть X - баназово пространство. $\exists e_1, \dots, e_n, \dots$ - линейно независимые точки. $\forall x \in X$, $x = \sum_1^{+\infty} \alpha_j e_j$. Тогда e_j - называется *базисом Шаудера*.

Теорема 2.10 (О почти конечномерности компактного оператора)**.** *Пусть $A : X \to X$ - компактный оператор. X - имеет базис Шаудера. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists B, C : \dim R(B) < +\infty, \|C\| \leqslant \varepsilon, A = B + C$*

Доказательство. По условию, $x = \sum_1^\infty \alpha_j e_j$, пусть $S_n(x) = \sum_1^n \alpha_j e_j$, $R_n(x) = (I - S_n)x$. Проверим, что оператор S_n непрерывен. Для начала, рассмотрим пространство $F = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \mid \sum_1^\infty \alpha_j e_j\text{- сходится в}X\}$. Введем на этом множестве норму $\|\alpha\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \|S_n(x)\|$. Очевидно, что это норма, также можно показать, что F - банахово (Пространство F - это по сути то же пространство X только в координатном смысле). **TODO**Рассмотрим оператор $T : F \to X$, $T(x) = \sum_0^\infty \alpha_j e_j$ - это линейный оператор. Очевидно, $\|T(\alpha)\| \leqslant \|\alpha\|$. В силу единственности разложения в ряд и того, как действует T, у него существует обратный оператор, который, по теореме Банаха о гомеоморфизме, будет ограниченным. $T^{-1} : X \to F$, $\left\|T^{-1}(x)\right\| \leqslant m \cdot \|x\|$. С другой стороны, $T^{-1}(x) = \alpha$, $\|\alpha\| \leqslant m \cdot \|x\| \implies \forall n \|S_n(x)\| \leqslant \|x\|$. Последовательность операторов S_n - поточечно сходится, и каждый из них непрерывен, тогда по теореме Банаха-Штейнгауза $\sup_n \|S_n\| = M < \infty$. Итак, мы доказали, что $I = S_n + R_n$, где S_n - непрерывный. Очевидно, что R_n - тоже непрерывен. Напишем тождество: $A = S_n A + R_n A$. Из них $S_n A$ - конечномерный. Проверим, что $\|R_n\| < \varepsilon$.

Так как оператор A - компактный, то у множества $A(V_1)$ есть конечная ε-сеть. Итак, $\forall \varepsilon\ \exists y_1, \cdots, y_n$ - ε-сеть для $A(V_1)$. $\forall x \in V_1\ \|R_n(Ax)\| \leqslant \|R_n(Ax - y_j)\| + \|R_n(y_j)\| \leqslant \|R_n\| \cdot \|Ax - y_j\| \leqslant \varepsilon$. Первое слагаемое меньше ε за счет ε-сети, второе, становится маленьким, за счет увеличения n. ☐

Утверждение 2.11. *Если A - компактный оператор, то A^* - тоже компактный.*

Доказательство. **TODO** ☐

Для функционального анализа фундаментальную роль играют уравнения вида

$$y = (\lambda I - A)x \tag{5}$$

и, в частности, $y = (I - A)x = Tx$.

Утверждение 2.12. *Пусть A - компактный оператор. Тогда* $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Ker} T \implies x = Ax$. Таким образом, ядро - это множество неподвижных точек оператора A. И $\operatorname{Ker} T$ - подпространство X. Рассмотрим $V_1 \subset \operatorname{Ker} T$ - единичная сфера в этом подпространстве. Тогда, очевидно, $A(V_1) = V_1$. По лемме Рисса о почти перпендикуляре, в бесконечномерном пространстве, единичная сфера - не компакт. А у нас - компакт, значит, пространство не бесконечномерное. ☐

Теорема 2.13. *Пусть оператор A - компактный. Тогда* $\operatorname{Cl} R(T) = R(T)$ *($R(T)$ - подпространство X).*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ker} T = \mathcal{L}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$. Для доказательства замкнутости, нужно показать существование априорной оценки. y можно представить как $y = T\left(x + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\right)$. Чтобы убедиться в существовании оценки, возьмем

$$\widehat{x} = \min_{\alpha_j, j=\overline{1,n}} \left\| x + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k \right\| \tag{6}$$

Покажем, что $\widehat{x}$ всегда существует и $\exists \alpha : \|\widehat{x}\| \leqslant \alpha \cdot \|y\|$. Пусть $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = f(\boldsymbol{\alpha}) = \|x + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\|$. $|f(\boldsymbol{\alpha} + \delta\boldsymbol{\alpha}) - f(\boldsymbol{\alpha})| \leqslant \sum_1^n |\alpha_k| \cdot \|\varphi_k\| \leqslant \sqrt{\sum_1^n \|\varphi_k\|^2} \cdot \sqrt{\sum_1^n \delta\alpha_k^2}$. Таким образом, $|f(\boldsymbol{\alpha} + \delta\boldsymbol{\alpha}) - f(\boldsymbol{\alpha})| \leqslant C \cdot \|\delta\boldsymbol{\alpha}\|$ - f - непрерывна. Обозначим $d = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \|\widehat{x} + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\|$. Нужно найти такие α, что $\|x + \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\| = f(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 2d$. Если α таковы что $\|\sum_1^n \alpha_k \varphi_k\| \geqslant 2d + \|\widehat{x}\|$ и $\exists \gamma : \|\sum_1^n \alpha_k \varphi_k\| \leqslant \gamma \|\alpha\|$ (γ существует потому что в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны), то $\gamma \|\alpha\| \geqslant 2d + \|\widehat{x}\|$. Обозначим $r = \frac{2d + \|\widehat{x}\|}{\gamma} \leqslant \|\alpha\|$. Тогда вне шара $V_r(0) \subset \mathbb{R}^n$, будет выполняться $f(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 2d$.

d - инфимум значений f, ☐

Теорема 2.14. *A — компактный оператор, тогда $\sigma(A)$ не более чем счетно и может состоять только из 0.*

Доказательство. Рассмотрим $\alpha > 0$. Покажем, что в отрезке $[\alpha, \|A\|]$ лежит конечное число точек спектра λ.

По модулю все точки $|\lambda|$ находятся в $[0, \|A\|]$.

Будем доказывать от противного. Пусть таких точек бесконечно много, тогда выделим подпоследовательность таких точек λ_n, что $\lambda_n \neq \lambda_m$ при $n \neq m$, $\alpha < |\lambda_n|$, $\lambda_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. λ_n — собственное число, x_n — собственный вектор..

Покажем, что при любом n собственные векторы $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — линейно независимые, а их линейные оболочки $L_n = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ и $L_{n+1} = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ вложены друг в друга.

Возьмем $x_1 \neq 0$, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $x_2 \neq 0$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Если допускать, что $x_2 = \gamma x_1$, то есть что они линейно зависимые, то $Ax_2 = \gamma A x_1$, следовательно $\lambda_2 x_2 = \gamma \lambda_1 x_1$, и значит $x_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\gamma x_1$. Но $x_2 = \gamma x_1$, и если $\gamma \neq 0$, то из $\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\gamma \implies \lambda_1 = \lambda_2$. Но мы предположили, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Таким образом, $\{x_1, x_2\}$ — линейно независимая пара точек.

Двигаемся так дальше по индукции, пусть на n-м шаге $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — линейно независимые, $\lambda_n x_n = Ax_n$. Покажем, что $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ тоже линейно независимые.

Покажем от противного. Пусть $\exists x_{n+1} \neq 0 : \lambda_{n+1} x_{n+1} = A x_{n+1}$, и пусть x_{n+1} линейно зависим: $x_{n+1} = \sum_1^n \gamma_k x_k$. Применим оператор A к этому равенству. $Ax_{n+1} = \sum_1^n \gamma_k A x_k$, $\lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_1^n \gamma_k \lambda_k x_k$. Разделим на λ_{n+1}. $x_{n+1} = \sum_1^n \gamma_k \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} x_k$ — единственно, так как $\{x_i\}$ — линейно независимые, и раз x_{n+1} ненулевой, то хотя бы одна $\lambda_{k_0} \neq 0$. Приравниваем две суммы и получаем $\gamma_{k_0} \frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_{n+1}} = \gamma_{k_0}$, и значит $\lambda_{k_0} = \lambda_{n+1}$. Получили два одинаковых значения λ, что приводит к противоречию, так как все собственные числа различны. И значит $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ линейно независимые, и включение $L_n \subset L_{n+1}$ — строгое.

Применим к получившейся цепи теорему Рисса о почти перпендикуляре. $\forall n \exists y_{n+1} \in L_{n+1} : \|y_{n+1}\| = 1, \|y_{n+1} - y\| \geqslant \frac{1}{2}$ для $\forall y \in L_n$. Получим последовательность $\{y_n\}$, каждый из который ограничен 1, значит, последовательность ограничена.

Определим $z_n = Ay_n$. В силу компактности A из z_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Проверим, что этого сделать нельзя, тогда получим противоречие, и теорема будет доказана.

Составим разность $z_{n+p} - z_n = \lambda_{n+p} y_{n+p} - (\lambda_{n+p} y_{n+p} - z_{n+p} + z_n) = \lambda_{n+p} y_{n+p} - (\lambda_{n+p} y_{n+p} - Ay_{n+p} + Ay_n)$. Проверим, принадлежит ли то, что в скобке, L_{n+p-1}.

$y_{n+p} \in L_{n+p} \implies y_{n+p} = \sum_1^{n+p} \gamma_k x_k \implies Ay_{n+p} = \sum_1^{n+p} \gamma_k A x_k = \sum_1^{n+p} \gamma_k \lambda_k x_k$.

Также $\lambda_{n+p} y_{n+p} = \sum_1^{n+p} \gamma_k \lambda_{n+p} x_k$. Представим Ay_{n+p} как $Ay_{n+p} = \gamma_{n+p}\lambda_{n+p} x_{n+p} + \sum_1^{n+p-1} \gamma_k \lambda_k x_k$. Теперь вычтем из предыдущего равенства последнее.

$\lambda_{n+p} y_{n+p} - Ay_{n+p} = \sum_1^{n+p-1} \beta_k x_k \in L_{n+p-1}$.

$y_n = \sum_1^n \alpha_k x_k$, и значит $Ay_n = \sum_1^n \alpha_k \lambda_k x_k \in L_{n+p-1}$.

Получим, что $\lambda_{n+p} y_{n+p} - Ay_{n+p} + Ay_n \in L_{n+p-1}$. Обозначим это за z. Тогда $z_{n+p} - z_n = \lambda_{n+p} y_{n+p} - z = \lambda_{n+p}(y_{n+p} - \frac{z}{\lambda_{n+p}})$. $\|z_{n+p} - z_n\| = |\lambda_{n+p}| \left\| y_{n+p} - \frac{z}{\lambda_{n+p}} \right\|$, где первый множитель не меньше α по нашему условию, а второй не меньше $\frac{1}{2}$ по построению последовательности $\{y_n\}$, и значит $\|z_{n+p} - z_n\| \geqslant \frac{\alpha}{2}$. Получается, что из z_n не выделить сходящуюся подпоследовательность, что приводит нас к противоречию. Это противоречие получилось из-за того,что изначально мы предположили, что на отрезке $[\alpha, \|A\|]$ лежит бесконечное количество точек спектра.

□

3 Теорема Гильберта-Шмидта

Определение (Гильбертово пространство)**.** H - гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, если.

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$

Пример ($\mathbb{C}^n$ – конечномерный случай). $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n), z_i \in \mathbb{C}$
$\langle z, u \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{u}_i$
$\langle x, x \rangle \geqslant 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

Определение (Самосопряженный оператор)**.** Линейный оператор $A : X \to X$ называется самосопряженным, если выполняется условие: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Пример. $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $A = \bar{A}^T$ – эрмитовски симметричная

Утверждение 3.1. *Если $\int_a^b K(k,t)f(t)dt$ - интегральный оператор, то $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$*

Доказательство. **TODO**
Домножить векторы на матрицу поворота ◻

Утверждение 3.2. *A – самосопряженный оператор, $\lambda = \mu + i\nu$. Тогда $\forall x \in H \Rightarrow \|Ax - \lambda x\| \geqslant |\nu| \cdot \|x\|$*

Доказательство.

1. Если матрица состоит из вещественных чисел: $\|Ax - \lambda x\|^2 = \langle Ax - \lambda x, Ax - \lambda x\rangle =$
$$= \left\langle \underbrace{Ax - \mu x}_{Lx, \mu\in\mathbb{R}} - i\nu x, Ax - \mu x - i\nu x \right\rangle = \underbrace{\langle Lx, Lx\rangle}_{\|Lx\|^2=0} - \underbrace{\underbrace{\langle Lx, i\nu x\rangle}_{-i\nu\langle Lx,x\rangle} - \underbrace{\langle i\nu x, Lx\rangle}_{i\nu\langle Lx,x\rangle}}_{=0} + |\nu|^2 \|x\|^2 \geqslant |\nu|^2 \|x\|^2$$

2. Если $Im(a) \neq 0$,
$Ker(A - \lambda i) = \{0\} \Rightarrow$ Собственные числа могут быть только вещественными. $\Rightarrow |\nu| = |\nu| \, \|x\| = 0$

◻

Утверждение 3.3. *Пусть A - линейный оператор в H, тогда $Cl\, R(A) = (KerA^*)^{\perp}$*

Доказательство.

N. B. 3.4. *В общем случае уже доказывали, сейчас выведем независимо.*
TODO*Написать, где доказательство.*

1. Рассмотрим $y \in R(A)$:
$\forall z \in KerA^* \Leftrightarrow A^*z = 0 \Rightarrow \langle y, z\rangle = \langle Ax, z\rangle = \langle x, A^*z, =\rangle \langle x, 0\rangle = 0$
Таким образом, $\forall y \in R(A) \Rightarrow y \perp A^*$
$y \in Cl\, R(A), y_n \in R(A), y_n \to y \Rightarrow 0 = \langle y_n, z\rangle \to \langle y, z\rangle \Rightarrow \langle y, z\rangle = 0$
Итак, $Cl\, R(A) \subset (KerA^*)^{\perp}$.

2. Проверим обратное включение $y \notin Cl\, R(A) \Rightarrow y \notin (KerA^*)^{\perp}$.
$Cl\, R(A) = H_1$ – подпространство $H, H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$.
Рассмотрим $y \notin H_1, \exists y_1 \in H_1, y_2 \in H_1^{\perp}, y_2 \neq 0 :\ y = y_1 + y_2$
$$y_2 \in KerA^* \Leftrightarrow A^*y_2 = 0 \Leftrightarrow \langle A^*y_2, A^*y_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \underbrace{A(A^*y_2)}_{\in H_1}, \underbrace{y_2}_{\in H_1^{\perp}} \right\rangle = 0$$
$\langle y, y_2\rangle = \|y_2\|^2 \neq 0 \Rightarrow y \notin (KerA^*)^{\perp}$

◻

Следствие 3.5. $H = Cl\, R(A) \oplus KerA^*$

Теорема 3.6. *Пусть оператор A самосопряженный,тогда $\sigma(A) \subset R$.*

Доказательство. $\lambda : Im\lambda \neq 0$, $R(A - \lambda x)$ – замкнуто
$(A - \lambda I)^* = A - \bar{\lambda} I$
$\left\|(A - \bar{\lambda} I)x\right\| \geqslant \underbrace{|Im\lambda|}_{\neq 0} \cdot \|x\|$
$Ker(A - \lambda I)^* = \{0\}, H = R(A - \lambda I)$
$: \exists (A - \lambda I)^{-1} \Rightarrow \lambda \in \dot{\rho}(A)$ ◻

Теорема 3.7. *A – самосопряженный и ограниченный в H.*

1. $\lambda \in \rho \Leftrightarrow \exists m > 0 : \forall x \in H \quad \|(A - \lambda I)x)\| \geqslant m \|x\|$

2. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists x_m : \|x_m\| = 1 \quad \|(A-\lambda I)x_m\| \to 0$

Доказательство.

1. $\Rightarrow$:
   $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \exists (A-\lambda I)^{-1} \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| \cdot M$
   $\left\|(A-\lambda I)^{-1}y\right\| \leqslant M \|y\|$
   $y = (A-\lambda I)x$
   $\frac{m}{M}\|x\| \leqslant \|(A-\lambda I)x\|$

   $\Leftarrow$:
   Если неравенство выполнено, то $R(A-\lambda I)$ - замкнут.
   $Im(\lambda) \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}, (A-\lambda I)^* = A - \lambda I$, $Ker(A-\lambda I) = \{0\}$
   $H = R(A-\lambda I)$ Значит, он сюрьективный.

2. Математическое отрицание пункта 1, но $Ax_n \approx \lambda x_n$.
   То есть, у самосопряженного оператора спектр состоит из почти собственных значений.

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} = \overline{\langle Ax, x\rangle} \Rightarrow \forall x \in H \quad \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \tag{7}$$

   Это называется кр. ф-ой самосопряженного оператора.

   TODO Расшифровать сокращения в предыдущей строчке.

□

Определение. Нижняя и верхняя граница оператора A
$m_- = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \quad m_+ = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$

Утверждение 3.8. $|\langle Ax, x\rangle| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|^2 = \|A\|$
То есть $|m_-|, |m_+| \leqslant$

Доказательство. $m_- \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant m_+ \quad \|x\| = 1$
$m_- \underbrace{\|x\|^2}_{\langle x,x\rangle} \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant m_+ \|x\|^2 \Rightarrow 0 \leqslant \langle (A - m_- I)x, x\rangle$ □

Теорема 3.9.

1. $\sigma(A) \subset [m_-, m_+]$

2. $m_-, m_+ \in \sigma(A)$

Доказательство.

1. Так как числа с ненулевой мнимой частью - точки резольвенты, рассмотрим только вещественные.

□

Теорема 3.10. *(теорема Гильберта-Шмидта) Пусть H - сепарабельное Гильбертово пространство, $A : H \to H$ - компактный самосопряженный оператор. Тогда из собственных векторов этого оператора можно составить ортонормированный базис H.*

Доказательство. Обозначим за $M = \bigoplus\limits_n M_n$, где M_n - собственные подпространства оператора. Достаточно доказать, что $H = M$. $H = M \bigoplus M^\perp$, докажем, что $M^\perp = 0$.
Обозначим $A_0 = A|_{M^\perp}$. Возьмем $x \in M^\perp$ и рассмотрим Ax. Проверим, что $Ax \perp M \implies Ax \in M^\perp$, тем самым покажем, что $A_0 : M^\perp \to M^\perp$. Для этого рассмотрим $\forall y \in M_n$:

$$(Ax, y) = (x, Ay) = (x, \lambda_n y) = \lambda_n (x, y)$$

В случае $x \in M^\perp$ получаем $(x, y) = 0, (Ax, y) = 0 \implies Ax \perp y$.
Теперь есть A_0 - компактный самосопряженный оператор. Все точки спектра использовались при построении M, у этого оператора спектр тривиален $\implies$ его спектральный радиус: $r_\sigma(A_0) = 0$. Значит, $||A_0|| = 0$. Значит, $A_0 = 0$.
Если допустить, что $\exists x \neq 0, x \in M^\perp$, то $A_0 x = 0$, $x \in Ker(A) = M_0$, но $M_0 \cap M^\perp = 0$, т.е. $x = 0$, $M^\perp = 0$.
Значит, $H = M$. Теорема доказана. □

Теорема 3.11 (Произведение положительных самосопряженных операторов). *$A, B \geqslant 0$ - самосопряженные операторы $\Rightarrow A \cdot B \geqslant 0$, если $AB = BA$*

Определение (Конус). K - замкнутое выпуклое множество, $t \geqslant 0, x \in K \Rightarrow tx \in K$

N. B. 3.12 (Свойства конуса).

$$x, -x \in K \Rightarrow x = 0$$
$$x, y \in K \Rightarrow y + x \in K$$

Утверждение 3.13. *Конус позволяет ввести частичный порядок:*

$$x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in K$$
$$y \geqslant x \Leftrightarrow y - x \in K$$

Определение. (Нормальный конус) Конус называется нормальным, если обладает свойством:

$$0 \leqslant x \leqslant y, \exists C - const, \|x\| \leqslant C \cdot \|y\|$$

Утверждение 3.14. *K - конус в $\dim X \leq \infty \Rightarrow K$ - нормальный.*

Пример. (Ненормальный конус)
$C^{(1)}[0,1]$, $\|x\| = max|x(t)| + max|x'(t)|$
$K = \{x(t) \geqslant 0\}$
$0 \leqslant sin^2(nt) \leqslant 1 \Rightarrow \|sin^2(nt)\| \leqslant \|1\| \cdot C$
$\|sin^2(nt)\| \to_{n\to\infty} \infty$

Теорема 3.15. *$A_n \leqslant A_{n+1} \leqslant C \Rightarrow \exists$ самосопряженный $A : \forall x \in H \Rightarrow Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$*

Определение. (Проектор)
Пусть H_1 подпространство H, тогда $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}, \forall x = x_1 + x_1^{\perp}, x_1 \in H_1$
Тогда $P_{H_1}(x) = P(x) = x_1$ называется проектором на подпространство H_1, причем он всегда единственный для H_1 из единственности разложения x на x_1 и $x_1^{\perp}$.

N. B. 3.16 (Свойства проектора).

$$P(x) \geqslant 0$$
$$(P(x), x) = (x, P(x)) = \|x_1\|^2$$
$$P^2 = P$$

Теорема 3.17. *P - проектор $\Leftrightarrow P$ - самосопряженный оператор, $P^2 = P$.*

Доказательство. $H_1 = \{x | x = Px\}$ - подпространство H.
Рассмотрим $x - Px, \forall y \in H_1, (x - Px, y) = (x - Px, Py) = (P(x - Px), y) = (Px - P^2x, y) = 0$, следовательно, $x - Px \perp H_1$.
Но $Px \in H_1$, так как $P(Px) = Px$, поэтому мы можем разложить $x = Px + z, z \in H_1^{\perp}$
Следовательно, $P_{H_1}(x) = P(x)$ □

Утверждение 3.18. $\|P\| = 1$

Пример. $L_2[0,1]$ и $[0,\lambda] \subset [0,1]$
$P_\lambda(x,t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leqslant t \leqslant \lambda \\ 0, & \lambda \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$
$H_1 = \{x \in L_2[0,1], x(t) = 0, t \in [\lambda, 1]\}$